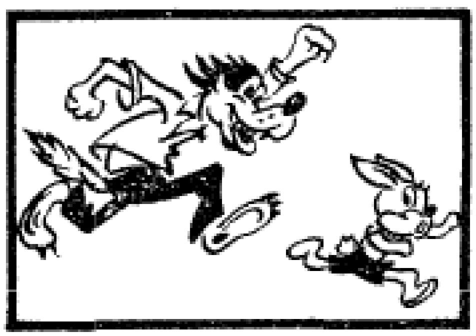
ваемых процессов преследования. Недопустимы сцены жестокости, пропаганда культа насилия. Мировая общественность бьет тревогу по поводу распространения так называемых «черных» компьютерных игр, разжигающих низменные инстинкты людей и представляющих определенную опасность для морального здоровья подрастающего поколения.

Интеллектуальные компьютерные игры преследования должны сыграть свою роль в деле достижения задачи всеобщей компьютерной грамотности и подготовки молодежи к будущей профессиональной деятельности в мире, насыщенном вычислительной техникой. Разработка алгоритмов и программ для игр преследования является необъятной областью творческой деятельности и предоставляет каждому интересующемуся возможность постепенно и незаметно для себя достичь высокого уровня в искусстве программирования.



Глава 2

Стратегии погонного преследования и параллельного сближения

1. ПРЕСЛЕДОВАНИЕ ПО ПОГОННОЙ ЛИНИИ

В этой главе рассматриваются наиболее простые математические модели задач преследования — игры преследования с двумя участниками: преследователем П и убегающим У. Местоположение преследователя (игрока П) в момент времени t обозначим через $P(t)$, а местоположение убегающего (игрока У) в этот момент времени — через $E(t)$. Время отсчитывается с момента начала преследования. Как это часто делается в механике при изучении движущихся объектов, будем считать местоположения игроков геометрическими точками. Предполагается, что игроки совершают простое движение. Так называется движение с ограниченной по величине скоростью, при этом направление движения может меняться произвольным образом. Пусть α — максимальная скорость преследователя и β — максимальная скорость убегающего, причем $\alpha > \beta$.

Точки $E(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ описывают линию, которая называется траекторией убегающего на отрезке времени $[0, T]$. Геометрическое место точек $P(t)$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$ называется траекторией преследователя на отрезке времени $[0, T]$. При простом движении эта траектория удовлетворяет условию $|P(t_1)P(t_2)| \leqslant \leqslant \alpha(t_2 - t_1)$ при $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$.

Таким образом, рассматриваемые игры преследования являются математическими моделями реальных процессов преследования, в которых преследователь движется быстрее убегающего и они оба способны в любой момент времени резко изменить направление своего движения. При этом движение не должно наталкиваться ни на какое препятствие до поимки убегающего.

Говорят, что преследование происходит по погонной линии, если выполняются следующие условия:

1) если $P(t) \neq E(t)$, то скорость преследователя максимальна и направлена по отрезку $P(t)E(t)$;

2) если существует момент времени τ такой, что $P(\tau) = E(\tau)$, то $P(t) = E(t)$ при $t \geqslant \tau$.

В этом случае говорят также, что преследователь использует стратегию погонного преследования. Зная точку $P(0)$ и местоположение убегающего $E(t)$ в каждый момент времени t, можно найти соответствующую траекторию преследователя. Эта траектория и называется погонной линией, исходящей из точки $P(0)$ и порожденной траекторией убегающего, описываемой точками $E(t)$ (рис. 10).

Опишем один способ приближенного построения погонной линии. Пусть задано число $\delta > 0$. Предположим, что на отрезке времени $[0, \delta]$ преследователь движется с максимальной скоростью по отрезку $P(0)E(0)$ до первого момента времени τ такого, что $P(\tau) = E(\tau)$ и $P(t) = E(t)$ при $t \geqslant \tau$. Если же $P(t) \neq \neq E(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$, то в момент времени δ преследователь меняет направление своего движения и на отрезке времени $[\delta, 2\delta]$ перемещается с максимальной скоростью по отрезку $P(\delta)E(\delta)$ до первого момента времени τ $(\delta < \tau \leqslant 2\delta)$, удовлетворяющего условиям $P(\tau) = E(\tau)$ и $P(t) = E(t)$ при $t \geqslant \tau$.

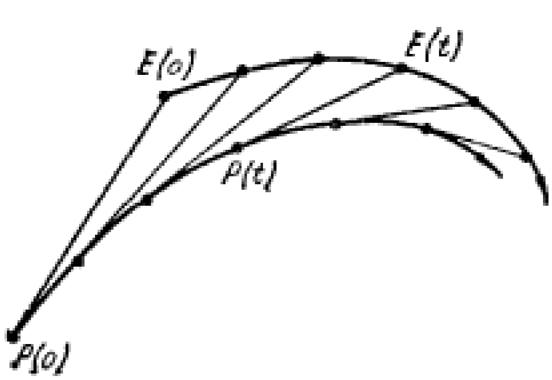


Рис. 10

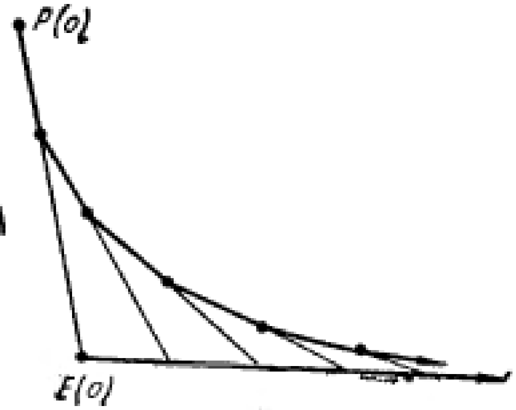


Рис. 11

Если $P(t) \neq E(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant n\delta$, то преследователь на отрезке времени $[n\delta, (n+1)\delta]$ перемещается с максимальной скоростью по лучу $P(n\delta)E(n\delta)$ до первого момента времени τ $(n\delta < \tau < (n+1)\delta)$, удовлетворяющего условию $P(\tau) = E(\tau)$; если такой момент времени существует, то $P(t) = E(t)$ при $t \geqslant \tau$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Описанный способ преследования называется δ-погонной стратегией игрока II или стратегией $\bar{u}_\delta$. Соответствующая траектория преследователя до момента поимки убегающего (первого момента времени τ, удовлетворяющего условию $P(\tau) = E(\tau)$), является ломаной (рис. 11). При достаточно малых δ эта траектория, как правило, хорошо приближает соответствующую погонную линию. Поэтому будем ее называть δ-погонной линией.

Предположим, что процесс преследования имеет фиксированную продолжительность $T > 0$ и целью преследователя является сближение с убегающим в момент времени T на как можно близкое расстояние $|P(T)E(T)|$. Убегающий имеет противоположную цель, т. е. стремится оказаться в момент времени T на как можно большем расстоянии от преследователя. Такая конфликтная задача преследования называется игрой простого преследования на плоскости с фиксированной продолжительностью.

Пусть убегающий удаляется от точки $E(0)$ с максимальной скоростью вдоль луча $P(0)E(0)$. Такой способ действия убегающего назовем стратегией v_0 игрока У. Тогда в момент времени T убегающий окажется в точке $\bar{E}(T)$ луча $P(0)E(0)$ такой, что

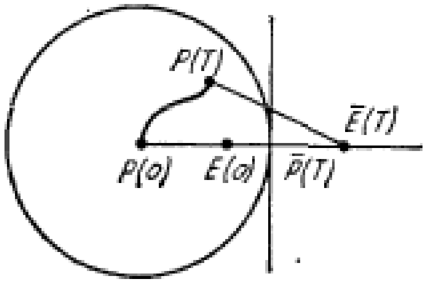


Рис. 12

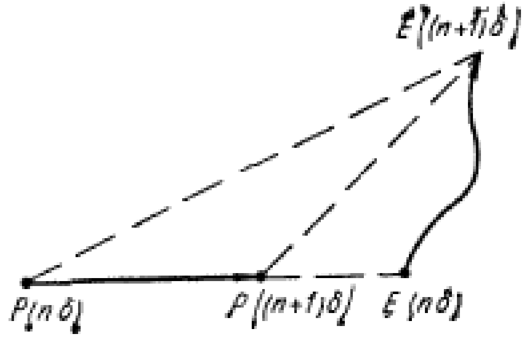


Рис. 13

$|E(0)\bar{E}(T)| = \beta T$. Если при этом преследователь будет использовать δ-погонную стратегию $\bar{u}_\delta$ (для любого числа $\delta > 0$), то он также перемещается по лучу $P(0)E(0)$ с максимальной скоростью до момента поимки убегающего и оказывается в момент времени T в точке $\bar{P}(T)$. Если поимка происходит до момента времени T, то $\bar{P}(T) = \bar{E}(T)$. В противном случае точка $\bar{P}(T)$ лежит внутри отрезка $P(0)\bar{E}(T)$ и $|P(0)\bar{P}(T)| = \alpha T$. Следовательно,

$$|\bar{P}(T)\bar{E}(T)| = |P(0)\bar{E}(T)| - |P(0)\bar{P}(T)| =$$
$$= (|P(0)E(0)| + \beta T) - \alpha T = |P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)T.$$

При любом другом способе действий преследователя в момент времени T он будет находиться в точке $P(T)$, принадлежащей кругу с центром в точке $P(0)$ и радиусом αT (рис. 12). Таким образом,

$$|\bar{P}(T)\bar{E}(T)| \leqslant |P(T)\bar{E}(T)|. \qquad (2.1)$$

Пусть теперь убегающий перемещается любым способом. Можно показать, что

$$|P(T)E(T)| \leqslant |\bar{P}(T)E(T)| + \varepsilon, \qquad (2.2)$$
$$\varepsilon = 2(\alpha + \beta)\delta,$$

для всех допустимых траекторий убегающего $E(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, и концов $P(T)$ соответствующих δ-погонных линий, где $\delta = T/m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Неравенства (2.1) и (2.2) означают, что стратегия v_0 является наилучшим способом действий убегающего, или, как говорят специалисты по теории игр, оптимальной стратегией игрока У. Эти же неравенства показывают, что стратегия $\bar{u}_\delta$ при достаточно малом $\delta > 0$ является почти наилучшим способом действий преследователя, или, по терминологии теории игр, его ε-оптимальной стратегией. Число $|\bar{P}(T)\bar{E}(T)|$ называется оптимальным расстоянием в рассматриваемой игре.

Действительно, если преследователь использует стратегию $\bar{u}_\delta$, а убегающий — стратегию v_0, то расстояние между ними в момент времени T равно $|\bar{P}(T)\bar{E}(T)|$. При достаточно малом δ ни один из участников не будет заинтересован в изменении своей стратегии. Неравенство (2.1) показывает, что преследователю невыгодно отклоняться от стратегии $\bar{u}_\delta$, а неравенство (2.2) означает, что убегающему не имеет смысла отклоняться от стратегии v_0. Заметим, что при $\delta \to 0$ получаем неравенство

$$|P(T)E(T)| \leqslant |\bar{P}(T)E(T)|.$$

Докажем неравенство (2.2). Предположим, что убегающий меняет свое местоположение $E(t)$ любым допустимым способом: $|E(t_1)E(t_2)| \leqslant \beta(t_2 - t_1)$ при $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$, а преследователь использует стратегию $\bar{u}_\delta$. Тогда, если

$$|P(n\delta)E(n\delta)| > (\alpha + \beta)\delta, \tag{2.3}$$

то

$$|P((n+1)\delta)E((n+1)\delta)| \leqslant |P(n\delta)E(n\delta)| - (\alpha - \beta)\delta, \tag{2.4}$$

$$n = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Действительно, в этом случае точка $P((n+1)\delta)$ лежит внутри отрезка $P(n\delta)E(n\delta)$, тогда (рис. 13)

$$\begin{aligned} &|P((n+1)\delta)E((n+1)\delta)| \leqslant \\ &\leqslant |P((n+1)\delta)E(n\delta)| + |E(n\delta)E((n+1)\delta)| \leqslant \\ &\leqslant (|P(n\delta)E(n\delta)| - \alpha\delta) + \beta\delta = \\ &= |P(n\delta)E(n\delta)| - (\alpha - \beta)\delta. \end{aligned}$$

Справедлива оценка (рис. 14)

$$\begin{aligned} |P((n+1)\delta)E((n+1)\delta)| &\leqslant |P((n+1)\delta)P(n\delta)| + \\ &+ |P(n\delta)E(n\delta)| + |E(n\delta)E((n+1)\delta)| \leqslant \\ &\leqslant |P(n\delta)E(n\delta)| + (\alpha + \beta)\delta. \end{aligned}$$

Поэтому если не выполняется условие (2.3), то

$$|P((n+1)\delta)E((n+1)\delta)| \leqslant \leqslant 2(\alpha+\beta)\delta = \varepsilon. \quad (2.5)$$

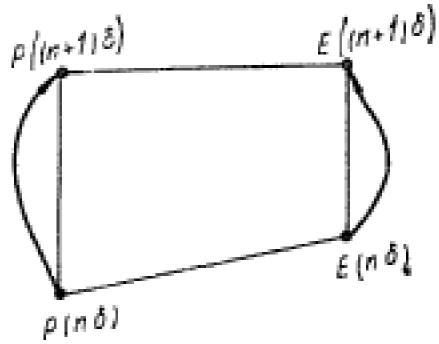


Рис. 14

Таким образом, если условие (2.3) выполняется для всех $n = 0, 1, \ldots, k-1$,

$$|P(k\delta)E(k\delta)| \leqslant |P(0)E(0)| - (\alpha-\beta)k\delta, \quad k = 1, \ldots, m.$$

В случае, когда $k = m$, имеем

$$|P(T)E(T)| \leqslant |P(0)E(0)| - (\alpha-\beta)T = |\bar{P}(T)\bar{E}(T)|,$$

что и требуется доказать. Если же для некоторого $n < m$ нарушается условие (2.3), то из соотношений (2.4) и (2.5) вытекает оценка

$$|P(T)E(T)| \leqslant \varepsilon \leqslant |\bar{P}(T)E(T)| + \varepsilon,$$

т. е. неравенство (2.2) справедливо и в этом случае.

Сближение преследователя с убегающим на расстояние, не большее чем $l > 0$, будем называть l-захватом. Рассмотрим теперь процесс преследования с нефиксированной продолжительностью, в которой целью игрока II является осуществление l-захвата за наименьшее время. Убегающий стремится как можно дольше избежать l-захвата. Такая конфликтная задача называется игрой простого преследования на быстродействие. Будем предполагать, что $|P(0)E(0)| > l$.

Если убегающий использует стратегию v_0, то при любом способе действий преследователя l-захват происходит не раньше момента времени

$$T_l = \frac{|P(0)E(0)| - l}{\alpha-\beta}.$$

Пусть $l_\varepsilon = l - \varepsilon(\alpha-\beta) > 0$ и

$$T_{l_\varepsilon} = \frac{|P(0)E(0)| - l_\varepsilon}{\alpha-\beta} = T_l + \varepsilon.$$

Если преследователь использует стратегию $\bar{u}_\delta$ такую, что

$$2(\alpha+\beta)\delta \leqslant \varepsilon(\alpha-\beta) \quad (\delta = T_{l_\varepsilon}/2m), \qquad (2.6)$$

то из соотношений (2.2) и (2.6) видно, что при любом способе действий убегающего в момент времени T_ε имеем

$$|P(T_{l_\varepsilon})E(T_{l_\varepsilon})| \leqslant [|P(0)E(0)| - (\alpha-\beta)T_{l_\varepsilon}] + \\ + \varepsilon(\alpha-\beta) = l_\varepsilon + \varepsilon(\alpha-\beta) = l.$$

Таким образом, указанная стратегия игрока II гарантирует l-захват в момент времени $T_l+\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое число.

Поэтому говорят, что стратегия v_0 оптимальна в игре простого преследования на быстродействие, а стратегия $\bar{u}_\delta$ при условии (2.6) является ε-оптимальной в этой игре. Если преследователь использует стратегию $\bar{u}_\delta$, удовлетворяющую условию (2.6), а убегающий — стратегию v_0, то l-захват происходит в момент времени T_l, причем игрокам невыгодно отклоняться от указанных стратегий при достаточно малых ε. Величина T_l называется оптимальным временем преследования.

2. РЕКУРСИВНАЯ СТРАТЕГИЯ ПОГОННОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Использование стратегии $\bar{u}_\delta$ эффективно при малых значениях δ. Это означает, что преследователь должен практически непрерывно наблюдать за убегающим. В этом параграфе показано, что на самом деле ему достаточно гораздо меньшей информации.

Опишем все начальные местоположения $P(0)$ и $E(0)$, удовлетворяющие условию: существует такое число $\tau \geqslant 0$, что убегающий не может избежать l-захвата в момент времени τ, если преследователь движется по лучу $P(0)E(0)$ с максимальной скоростью. Другими словами, найдем все пары точек $P(0)$ и $E(0)$ таких, что круг $S(E(0), \beta\tau)$ с центром в точке $E(0)$ и радиусом $\beta\tau$ находится внутри круга $S(P(\tau), l)$ с радиусом l, центр которого $P(\tau)$ лежит на луче $P(0)E(0)$ и $|P(0)P(\tau)| = \alpha\tau$ при некотором $\tau \geqslant 0$ (рис. 15).

Для того чтобы выполнялось это условие, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha\tau + l \geqslant |P(0)E(0)| + \beta\tau,$$
$$\alpha\tau - l \leqslant |P(0)E(0)| - \beta\tau$$

или (рис. 16)

$$\begin{cases} (\alpha-\beta)\tau \geqslant \eta - l, \\ (\alpha+\beta)\tau \leqslant \eta + l, \\ \qquad \eta = |P(0)E(0)|. \end{cases}$$

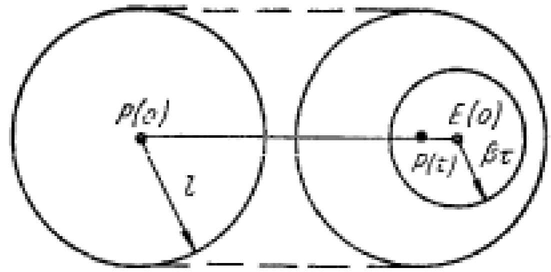


Рис. 15

Таким образом, если $l < |P(0)E(0)| \leqslant l_1 = l\frac{\alpha}{\beta}$, то убегающий не может избежать l-захвата в момент времени

$$\tau = \frac{|P(0)E(0)| - l}{\alpha - \beta}.$$

Меняя в этом рассуждении число l на l_1, получаем следующее утверждение: если

$$|P(0)E(0)| \leqslant l_2 = l\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2,$$

то преследователь осуществляет l-захват, меняя не более одного раза направление своего движения.

Действительно, если $|P(0)E(0)| \leqslant l_1$, то преследователь осуществляет l-захват, двигаясь по лучу $P(0)E(0)$ с максимальной скоростью. Если же

$$l_1 < |P(0)E(0)| \leqslant l_2,$$

то преследователь производит l_1-захват при движении по отрезку $P(0)E(0)$ с максимальной скоростью в момент времени

$$\tau_1 = \frac{|P(0)E(0)| - l_1}{\alpha - \beta}.$$

Двигаясь далее с максимальной скоростью по лучу $P(\tau_1)E(\tau_1)$, преследователь в момент времени

$$\tau_1 + \frac{|P(\tau_1)E(\tau_1) - l}{\alpha - \beta}$$

осуществляет l-захват.

Аналогично доказывается, что если

$$|P(0)E(0)| \leqslant l_n = l\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n, \quad n > 1, \tag{2.7}$$

то преследователь, изменяя не более $n-1$ раз направ-

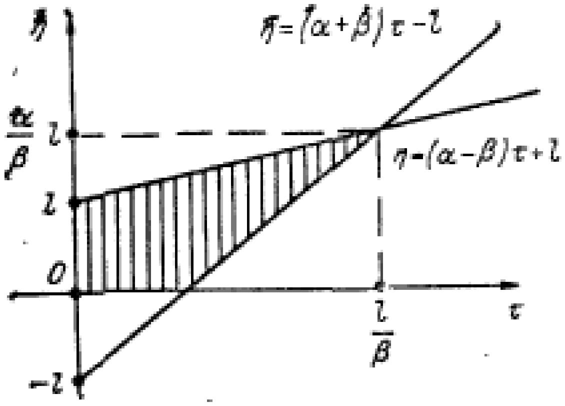


Рис. 16

ление движения, осуществляет l-захват убегающего. Из неравенства (2.7) следует, что $l_{m(1)} < |P(0)E(0)| \leqslant \leqslant l_{m(1)+1}$, где $m(1)$ — некоторое целое число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \leqslant m(1) \leqslant n-1$. Тогда преследователь, двигаясь со скоростью α по лучу $P(0)E(0)$ в момент времени

$$\tau_1 = \frac{|P(0)E(0)| - l_{m(1)}}{\alpha-\beta},$$

гарантирует $l_{m(1)}$-захват. При этом $|P(\tau_1)E(\tau_1)| \leqslant l$ или

$$l_{m(2)} < |P(\tau_1)E(\tau_1)| \leqslant l_{m(2)+1} \quad (0 \leqslant m(2) \leqslant m(1)-1).$$

Во втором случае преследователь, двигаясь с максимальной скоростью по лучу $P(\tau_1)E(\tau_1)$, гарантирует $l_{m(2)}$-захват в момент времени

$$\tau_2 = \tau_1 + \frac{|P(\tau_1)E(\tau_1)| - l_{m(2)}}{\alpha-\beta}$$

и т. д. В некоторый момент времени τ_k $(k \leqslant n)$ имеем

$$l < |P(\tau_k)E(\tau_k)| \leqslant l_1.$$

Тогда, двигаясь по лучу $P(\tau_k)E(\tau_k)$ со скоростью α, преследователь осуществляет l-захват в момент времени

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \frac{|P(\tau_k)E(\tau_k)| - l}{\alpha-\beta}.$$

Описанный способ преследования называется рекурсивной стратегией погонного преследования и обозначается символом $\bar{a}_n$. Оценим время l-захвата при использовании игроком II стратегии $\bar{a}_n$. Это время не превосходит величины

$$\tau = [(|P(0)E(0)| - l_{m(1)}) + (|P(\tau_1)E(\tau_1)| - l_{m(2)}) + \ldots$$
$$\ldots + (|P(\tau_k)E(\tau_k)| - l)] : (\alpha-\beta) \leqslant$$
$$\leqslant [(|P(0)E(0)| - l_{m(1)}) + (l_{m(1)} + l_{m(2)}) +$$
$$+ (l_{m(2)} - l_{m(3)}) + \ldots + (l_1 - l)] : (\alpha-\beta),$$

где $m(1) \geqslant m(2)+1$, $m(2) \geqslant m(3)+1$, ... Следовательно, справедливо неравенство

$$\tau \leqslant \frac{|P(0)E(0)|-l}{\alpha-\beta} = T_l.$$

Таким образом, если справедлива оценка (2.7), то стратегии $\bar{a}_n$ и v_0 удовлетворяют следующим условиям:

1) когда игроки используют стратегии $\bar{a}_n$ и v_0, l-захват происходит в момент времени T_l;

2) стратегия $\bar{a}_n$ гарантирует преследователю l-захват не позже момента времени T_l;

3) стратегия v_0 гарантирует убегающему избежание l-захвата по крайней мере до момента времени T_l.

Поэтому стратегии $\bar{a}_n$ и v_0 называются оптимальными в игре простого преследования на быстродействие, удовлетворяющей условию (2.7); величина T_l называется оптимальным временем преследования. Ни одному из игроков П и У невыгодно отклоняться от своей оптимальной стратегии, если противник продолжает придерживаться своей оптимальной стратегии.

Мы доказали, что в рассматриваемой игре преследования игроку П нет необходимости вести непрерывное наблюдение за убегающим. Ему достаточно фиксировать положение убегающего n раз, где

$$n \geqslant \frac{1}{\ln \frac{\alpha}{\beta}} \ln \frac{|P(0)E(0)|}{l}.$$

Пусть, например, $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $l = 0{,}01$, $|P(0)E(0)| = 10$. Тогда $T_l = 9{,}99$ и $n \geqslant 9{,}966$. Минимальное достаточное число коррекций направлений движения преследователя равно 9, первую коррекцию игрок П производит в момент времени

$$\tau_1 = 10 - 0{,}01 \cdot 2^9 = 4{,}88.$$

Таким образом, на отрезке времени, равном почти половине оптимального времени преследования, нет необходимости в наблюдении за убегающим и игрок П движется с максимальной скоростью по лучу $P(0)E(0)$.

Используя полученные результаты, можно решить и игру простого преследования с фиксированной продолжительностью T такой, что уравнение относительно величины l

$$T = \frac{|P(0)E(0)| - l}{\alpha - \beta}$$

имеет положительный корень

$$l = |P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)T > 0.$$

3. *E*-ПОГОННАЯ СТРАТЕГИЯ

Существуют и другие решения игры простого преследования на быстродействие. Опишем еще один класс оптимальных стратегий игрока **П**.

Пусть в момент времени τ_i еще не осуществлена поимка убегающего и преследователь начинает движение с максимальной скоростью по лучу $P(\tau_i)E(\tau_i)$. При этом он должен решить, до какого момента времени τ_{i+1} двигаться по этому лучу. Например, при использовании стратегии $\overline{u}_\delta$ момент времени τ_{i+1} совпадает с моментом поимки, если поимка убегающего происходит до момента времени $\tau_i + \delta$, в противном случае $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$.

Пусть точка A_i лежит на луче $P(\tau_i)E(\tau_i)$ и

$$|P(\tau_i)A_i| = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}|P(\tau_i)E(\tau_i)|.$$

Построим круг $S(P(\tau_i), R(\tau_i))$ с центром в точке $P(\tau_i)$ и радиусом $R(\tau_i) = |P(\tau_i)E(\tau_i)|$. Проведем из точки A_i две касательные A_iB_i и A_iC_i к этому кругу (рис. 17). Пусть $S(P(t), R(t))$ — круг с центром $P(t)$ на луче $P(\tau_i)E(\tau_i)$, касающийся лучей A_iB_i и A_iC_i, $\tau_0 = 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Говорят, что игрок **П** использует *E*-погонную стратегию, если его движение удовлетворяет следующим условиям:

1) траекториями преследователя являются ломаные $P(0)P(\tau_1)\ldots P(\tau_n)\ldots$;

2) в момент времени τ_i преследователь начинает двигаться со скоростью α по лучу $P(\tau_i)E(\tau_i)$ и меняет направление движения в некоторый момент времени $t = \tau_{i+1}$ до выхода точки $E(t)$ из круга $S(P(t), R(t))$;

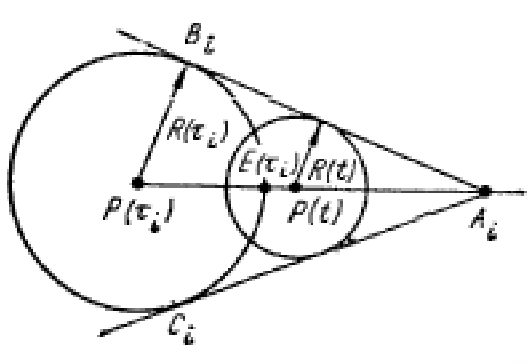


Рис. 17

$$|P(t)E(t)| \leqslant R(t) \text{ при } \tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Заметим, что в момент времени τ_i игрок **П** может и не знать продолжительность своего движения по выбранному направлению и определить момент τ_{i+1} в ходе преследования.

Так как справедливы равенства

$$\frac{R(t)}{R(\tau_i)} = \frac{|P(t)A_i|}{|P(\tau_i)A_i|} = \frac{|P(\tau_i)E(\tau_i)| - (\alpha - \beta)(t - \tau_i)}{|P(\tau_i)E(\tau_i)|}$$

и

$$R(\tau_i) = |P(\tau_i)E(\tau_i)|,$$

то

$$R(t) = |P(\tau_i)E(\tau_i)| - (\alpha - \beta)(t - \tau_i).$$

Таким образом, если при использовании игроком **П** в процессе преследования E-погонной стратегии и любом способе действий игрока **У** местоположения преследователя $P(t)$ описывают ломаную

$$P(0)P(\tau_1)\ldots P(\tau_n)\ldots,$$

то справедливы неравенства

$$|P(t)E(t)| \leqslant |P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)t$$

при $0 \leqslant t \leqslant \tau_1$,

$$\begin{aligned} |P(t)E(t)| &\leqslant |P(\tau_1)E(\tau_1)| - (\alpha - \beta)(t - \tau_1) \leqslant \\ &\leqslant (|P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)\tau_1) - (\alpha - \beta)(t - \tau_1) = \\ &= |P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)t \end{aligned}$$

при $\tau_1 \leqslant t \leqslant \tau_2$,

$$\begin{aligned} |P(t)E(t)| &\leqslant |P(\tau_i)E(\tau_i)| - (\alpha - \beta)(t - \tau_i) \leqslant \\ &\leqslant |P(\tau_{i-1})E(\tau_{i-1})| - (\alpha - \beta)(t - \tau_{i-1}) \leqslant \ldots \\ &\ldots \leqslant |P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)t \end{aligned}$$

при $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Следовательно,

$$|P(t)E(t)| \leqslant |P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)t$$

при $0 \leqslant t \leqslant \theta$, где $\theta = \lim\limits_{n \to \infty} \tau_n$. Из этого неравенства для первого момента осуществления l-захвата $t \leqslant \theta$ получаем оценку

$$t \leqslant T_l = \frac{|P(0)E(0)| - l}{\alpha - \beta}. \tag{2.8}$$

Действительно, если $t \leqslant \theta$ и $\theta \leqslant T_l$, то $t \leqslant T_l$, а если $\theta > T_l$, то

$$|P(T_l)E(T_l)| \leqslant |P(0)E(0)| - (\alpha - \beta)T_l = l;$$

следовательно, и в этом случае $t \leqslant T_l$.

Говорят, что E-погонная стратегия является успешной, если выполняется условие

$$P(\theta) = E(\theta) \tag{2.9}$$

при любом способе действий убегающего. Заметим, что момент времени θ и состояния $P(\theta)$ $E(\theta)$ являются различными при разных допустимых способах действий игрока **У**. Из условия (2.9) вытекает, что в некоторый момент коррекции направления движения преследователя τ_n справедливо неравенство $|P(\tau_n)E(\tau_n)| < l$, т. е. успешная E-погонная стратегия обеспечивает l-захват убегающего.

Таким образом, из неравенства (2.8) следует, что успешная E-погонная стратегия гарантирует преследователю l-захват не позже момента времени T_l. Так как стратегия v_0 гарантирует убегающему избежание l-захвата до момента времени T_l, то успешная E-погонная стратегия и стратегия v_0 являются оптимальными в игре простого преследования на быстродействие, а величина T_l — оптимальное время преследования.

Заметим, что указанные стратегии оптимальны для всех чисел $l > 0$ и любых начальных местоположений игроков $P(0)$ и $E(0)$. Поэтому их называют универсальными оптимальными стратегиями.

Опишем один класс успешных E-погонных стратегий. Предположим, что моменты коррекций направления движения преследователя удовлетворяют неравенствам

$$\frac{k}{\alpha - \beta}|P(\tau_i)E(\tau_i)| \leqslant \tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \frac{|P(\tau_i)E(\tau_i)|}{\alpha}, \tag{2.10}$$

где $0 < k \leqslant (\alpha - \beta)/\alpha$. Тогда из неравенства треугольника вытекает оценка (рис. 18)

$$|P(t)E(t)| \leqslant [|P(\tau_i)E(\tau_i)| - \alpha(t - \tau_i)] + \beta(t - \tau_i) = \\ = |P(\tau_i)E(\tau_i)| - (\alpha - \beta)(t - \tau_i) \tag{2.11}$$

при $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$. Из неравенств (2.10) и (2.11) полу-

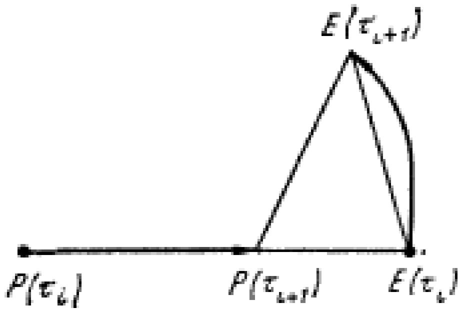


Рис. 18

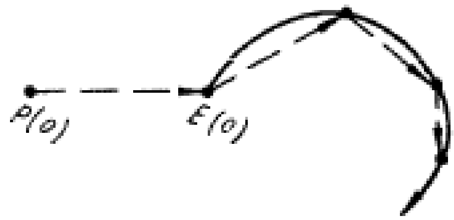


Рис. 19

чаем соотношение

$$|P(\tau_{i+1})E(\tau_{i+1})| \leqslant (1-k)\,|P(\tau_i)E(\tau_i)|,$$

следовательно,

$$|P(\tau_n)E(\tau_n)| \leqslant (1-k)^n |P(0)E(0)| \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как $0 < 1 - k < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(1-k)^n = 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} |P(\tau_n)\,E(\tau_n)| = 0 = |P(\theta)\,E(\theta)|,$$

где $\theta = \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n$, т. е. в этом случае выполняется условие (2.9).

Таким образом, если игрок П движется с максимальной скоростью по лучу $P(0)E(0)$ до любого момента времени τ_1, удовлетворяющего условию

$$\frac{k}{\alpha-\beta}\,|P(0)\,E(0)| \leqslant \tau_1 \leqslant \frac{|P(0)\,E(0)|}{\alpha},$$

и движется со скоростью α по лучу $P(\tau_i)E(\tau_i)$ до некоторого момента времени τ_{i+1}, удовлетворяющего условию (2.10), то из неравенства (2.11)

$$|P(t)E(t)| \leqslant R(t)$$

при $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$ вытекает, что такой способ преследования является E-погонной стратегией. Поскольку при этом выполняется и условие (2.9), указанная стратегия является успешной E-погонной стратегией — универсальной оптимальной стратегией игрока П в играх простого преследования на быстродействие. На рис. 19 изображен случай, когда игрок П использует правило

$$\tau_{i+1} = \tau_i + \frac{|P(\tau_i)\,E(\tau_i)|}{\alpha}.$$

Доказано, что игроку II достаточно фиксировать положение убегающего и менять направление своего движения не более чем n раз, где число n удовлетворяет условию

$$(1-k)^n |P(0)E(0)| \leqslant l$$

или

$$n \geqslant \left(\ln \frac{l}{|P(0)\,E(0)|}\right) : \ \ln(1-k).$$

4. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СБЛИЖЕНИЕ

При определении и использовании стратегии параллельного сближения будем считать, что выполняются следующие условия.

Прежде всего будем предполагать, что игроки движутся с максимальными скоростями. Это предположение значительно сокращает доказательство многих утверждений. Ясно, что преследователь и убегающий, имеющие противоположные цели, должны использовать все свои возможности. В частности, они должны двигаться с максимальными скоростями α и β. Заметим, что любое прямолинейное движение со скоростью меньше максимальной равносильно некоторому зигзагообразному движению с максимальной скоростью. Будем также считать, что игроки движутся по ломаным и на конечном отрезке времени они могут менять направление движения конечное число раз. Это ограничение не является существенным, поскольку практически любую траекторию движения можно сколь угодно точно приблизить ломаной линией.

Предположим, что в любой момент времени $t \geqslant 0$ преследователь может определить свое местоположение $P(t)$, местоположение убегающего $E(t)$ и направление его движения $E(t)A(t)$ Стратегией параллельного сближения, или П-стратегией, называется следующий способ преследования.

Пока убегающий движется по лучу $E(0)A(0)$, преследователь перемещается по лучу $P(0)B(0)$, где $B(0)$ — «точка перехвата», определяемая условиями:

1) $B(0)$ лежит на луче $E(0)A(0)$;

2) $\frac{|P(0)\,B(0)|}{\alpha} = \frac{|E(0)\,B(0)|}{\beta}$,